INTRODUCTION TO W-ALGEBRAS AND THEIR REPRESENTATIONS(Algebraic combinatorics and the related areas of research)

荒川, 知幸

数理解析研究所講究録 1476 巻 2006 年 152-164

INTRODUCTION TO W-ALGEBRAS AND THEIR REPRESENTATIONS

奈良女子大学理学部 荒川 知幸 (TOMOYUKI ARAKAWA)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, NARA WOMEN'S UNIVERSITY

1. INTRODUCTION

1.1. 代表的な無限次元 Lie 環として, **アフィン Lie 環**と **Virasoro 代数**が良く知られているが, これらの Lie 環には, 有限次元 Lie 環には見られない特有な現象が現れる. 中でも

ある種の表現の指標のモヂュラ不変性

は著しい性質であるといって良いだろう. アフィン Lie 環の場合の**可積分表現**, あるいは Virasoro 代数の場合の**極小系列表現**がこうした性質を持つ[1].

ところが, これら 2 つには明らかな違いがある. アフィン Lie 環は Lie 環の family であるのに対し, Virasoro 代数はただ一つの Lie 環の名称である. したがって, Virasoro 代数を一般化しようというのは自然な発想だと思われる.

W 代数はこのような Virasoro 代数の一般化である. 実際, これが W 代数が "W" 代数と呼ばれるひとつの所以である[2](らしい).

1.2. 一般に, 任意の有限次元単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して, 対応する W 代数 $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ が存在する. (各 $\mathfrak{g}$ に対応するアフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ が存在するように.) これらはもともと (A, D 型の場合に) 物理学者が導入したものだが ([Zm85, FZ87, FL88]), 後に B. Feigin と E. Frenkel [FF90] が**量子還元法**を発見し, 一般の型の $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ を定義した. Feigin-Frenkel の量子還元法は, 次の意味で非常に優れた構成方法である:

- 数学者にとってわかりやすい.
- W 代数を定義するのみならず, その表現も $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現から函手的に構成することができる.

1.3. W 代数の "定義" を説明する前に例を挙げよう.

最も単純な $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合である: $\mathcal{W}(\mathfrak{sl}_2)$ は Virasoro 代数 *Vir* に他ならない. *Vir* は次の生成元と関係式で定義される.

生成元: L_n $(n \in \mathbb{Z})$, $\mathbf{c}$

関係式: $[L_n, \mathbf{c}] = 0$

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}\mathbf{c}.$$

[1] アフィン Lie 環の場合, 許容表現 (admissible representations) という, 可積分表現を含むより広いクラスの表現がモジュラ不変性を持つことが知られている. (なお, 許容表現は $\widehat{\mathfrak{g}}$ のモジュラ不変な表現を尽くすことが予想されている ([KW89]).)

[2] アルファベット順で, "V" の次は "W" ですよね.

次に簡単な W 代数は $\mathcal{W}(\mathfrak{sl}_3)$ である[3]. これは次の生成元と関係式で定義される.

生成元: $\mathbf{c}, L_n \ (n \in \mathbb{Z}),\ W_n \ (n \in \mathbb{Z})$,
関係式: $[\mathbf{c}, \mathcal{W}(\mathfrak{sl}_3)] = 0$,

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}\mathbf{c}$$

$$\begin{aligned}&[W_m, W_n]\\ &= (m-n)\left\{\frac{1}{15}(m+n+3)(m+n+2) - \frac{1}{6}(m+2)(n+2)\right\}L_{m+n}\\ &+\frac{16}{22+5\mathbf{c}}(m-n)\Lambda_{m+n} + \frac{\mathbf{c}}{360}m(m^2-1)(m^2-4)\delta_{m+n,0}.\end{aligned}$$

ここで,

$$\Lambda_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} :L_{n-k}L_k: - \frac{3}{10}(n+2)(n+3)L_n. \tag{1}$$

上の式にはいくつか奇妙な点があるが, 式の分母に現れる $22+5\mathbf{c}$ はさして問題ではない. 実際, 生成元 W_n に $22+5\mathbf{c}$ を掛けて再定義すればこの項は消える. (その結果, 式の見栄えは更に悪くなるが.) 真に問題なのは Λ_n に現れる無限和である[4]. この項のため, 上は通常の意味での Lie 環を定義しない. Virasoro 代数以外の $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ はもはや Lie 環ではなく, **頂点代数**[5]として理解されるべきものなのである[6]

1.4. 上で見たように, $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ は極めて複雑な構造を持ち[7] Lie 環ですらない. このようなものが Virasoro 代数の正当な一般化と言えるのだろうか?

答えは Yes である. なぜなら, $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ は Virasoro 代数の最も好ましい性質を継承しているからである:

Conjecture 1 (E. Frenkel, V. Kac and M. Wakimoto [FKW92]). *任意の有限次元単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ について, 対応する W 代数 $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ はモジュラ不変な表現 (= "極小系列表現") を持つ. 実際, これらの表現は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の許容表現から量子還元関手 $\mathcal{F}$ により実現される.*

もう少し詳しく説明しよう. 量子還元関手 $\mathcal{F}$ は次のように定義される:

$$\mathcal{F}(V) = H_0(V), \tag{3}$$

ただし, $H_\bullet(V)$ はある種の Lie 環の (semi-infinite な) ホモロジーである ((9) を見よ). ここで $\widehat{L}(\lambda)$ を最高ウエイト λ を持つ $\widehat{\mathfrak{g}}$ の既約表現としよう. λ が許容ウエイトのと

---

[3] $\mathcal{W}(\mathfrak{sl}_N)$ はしばしば $\mathcal{W}_N$ と書かれる.

[4] $:\ :$ は正規積. つまり,

$$:L_mL_n: = \begin{cases} L_mL_n & (m<0) \\ L_nL_m & (m\geq 0).\end{cases}$$

[5] vertex algebra; (ひどい命名法だが) vertex operator algebra (VOA) との違いは Virasoro 元の有無のみである. (Virasoro 元の存在を仮定する方が VOA.)

[6] 実際に頂点代数として見るときには, $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ の中心 $\mathbf{c}$ を特殊化しておく必要がある; $\mathbf{c}$ を

$$c(k) = \ell - 12(\kappa|\rho^\vee|^2 - \langle\rho,\rho^\vee\rangle + |\rho|^2/\kappa) \tag{2}$$

(ℓ は $\mathfrak{g}$ のランク, $\kappa = k + h^\vee$. $h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の dual Coxeter 数.) に特殊化したものを $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g})$ と書く.

[7] 一般の $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ の関係式は複雑過ぎて書く下すことさえできない!

き $L(\lambda)$ は許容表現となる[8]. 実際の Frenkel-Kac-Wakimoto の予想は次の形で述べられている[9]:

Conjecture 2 ([FKW92]). λ を許容ウエイトとすると, $H_{i\neq 0}(\widehat{L}(\lambda))=0$. さらに, $H_0(\widehat{L}(\lambda))$ は零または既約.

Conjecture 1 は Conjecture 2 から次のように従う: ホモロジーの消滅から, $\mathcal{F}(\widehat{L}(\lambda))$ の指標が

$$\mathrm{ch}\,\widehat{L}(\lambda)\times\prod_{\alpha\in\widehat{\Delta}_+^{\mathrm{re}}}(1-e^{-\alpha})$$

の特殊化 (homogeneous specialization) として得られることがわかる[10]. ただし, $\widehat{\Delta}_+^{\mathrm{re}}$ は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の正の実ルートの集合. この事実と $\widehat{L}(\lambda)$ のモジュラ不変性から $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ 加群

$$\{\mathcal{F}(\widehat{L}(\lambda));\lambda\text{ は許容ウエイト}\}$$

のモジュラ不変性が従う[11]. 従って, $\widehat{\mathfrak{g}}$ の許容表現の関手 $\mathcal{F}$ による像が $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ のモジュラ不変な表現となるのである[12].

1.5. Conjecture 2 は [A2, A4] で証明された. 実際には, 次のずっと強い主張が成立する:

Theorem 1 ([A4]).

(1) $\widehat{\mathfrak{g}}$ の圏[13]$\mathcal{O}$ の任意の対象 V について $H_{i\neq 0}(V)=0$.
(2) λ の古典部分[14] $\bar{\lambda}$ が *anti-dominant* [15] のとき, $H_0(\widehat{L}(\lambda))$ は既約. そうでなければ $H_0(\widehat{L}(\lambda))$ は零.
(3) $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ の任意の既約最高ウエイト表現はある $H_0(\widehat{L}(\lambda))$ に同型.

---

[8]λ が許容ウエイトであるとは, 次を満たすことをいう:

(4) λ は regular dominant である (つまり, $\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle\notin-\mathbb{N}$ $(\forall\alpha\in\widehat{\Delta}_+)$).

(5) the $\mathbb{Q}$-span of $\{\alpha^\vee\in\widehat{\Delta}_+^{\vee\,\mathrm{re}};\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle\in\mathbb{Z}\}$ = the $\mathbb{Q}$-span of $\widehat{\Delta}_+^{\vee\,\mathrm{re}}$.

[9]実際の予想はここに書いたものより強く, 彼らは $H_0(\widehat{L}(\lambda))\neq 0$ となるための必要十分条件まで予想し, 必要条件を証明している (ただしその証明にはギャップがある).

[10]$H_\bullet(V)$ は次が成立するように定義されている:

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\,\mathrm{ch}\,C_i(V)=\text{“}\mathrm{ch}\,V\times\prod_{\alpha\in\widehat{\Delta}_+^{\mathrm{re}}}(1-e^{-\alpha})\text{ の homogeneous specialization”}.$$

(ただし成立するのは右辺が well-defined のとき.) ここで, $C_\bullet(V)$ は $H_\bullet(V)$ を定義する Chevalley 複体 ((9) 参照). これと Euler-Poincare の原理を使う.

[11]実際にはレベル $k\in\mathbb{Q}$ を固定したところで考える.

[12]$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ の場合は勿論 Virasoro 代数の極小系列表現が現れる.

[13]圏 $\mathcal{O}$ は次を満たす加群 V からなる $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群の圏の充満部分圏である.

(a) V はウエイト分解を持つ. すなわち, $V=\bigoplus_{\lambda\in\widehat{\mathfrak{h}}^*}V^\lambda$, $V^\lambda=\{v\in V;hv=\lambda(h)v\ (\forall h\in\widehat{\mathfrak{h}})\}$.
(b) $\widehat{\mathfrak{h}}$ の有限部分集合が $\{\mu_1,\dots,\mu_r\}$ 存在し, $V^\lambda\neq 0$ なる λ はすべて $\bigcup_i\mu_i-\widehat{Q}_+$ に含まれる. ただし, $\widehat{Q}_+=\sum_{\alpha\in\widehat{\Delta}_+}\mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha$.

($\widehat{L}(\lambda)$ は $\mathcal{O}$ の対象である.)

[14]classical part; つまり制限写像により $\mathfrak{g}$ のウエイトとみたもの.

[15]$M(\bar{\lambda})$(=最高ウエイト $\bar{\lambda}$ の $\mathfrak{g}$ の Verma 加群) が既約であることと同値.

最高ウエイト λ の $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Verma 加群を $\widehat{M}(\lambda)$ とする. このとき,

$$\mathrm{ch}\,\widehat{L}(\lambda) = \sum_{\mu} m_{\lambda,\mu}\,\mathrm{ch}\,\widehat{M}(\mu) = \sum_{\mu} m_{\lambda,\mu} e^{\lambda} \prod_{i\geq 1}(1-q^{-i})^{-\ell} \prod_{\alpha\in\widehat{\Delta}_+^{\mathrm{re}}} (1-e^{-\alpha})^{-1}$$

($m_{\lambda,\mu}\in\mathbb{Z}$, $q=e^{\delta}$) と書ける. したがって, Theorem 1 (1) より

$$\mathrm{ch}\, H_0(L(\lambda)) = \sum_{\mu} m_{\lambda,\mu} q^{\mu(D)} \prod_{i\geq 1}(1-q^{-i})^{-\ell}. \tag{6}$$

が成立する. 整数 $m_{\lambda,\mu}$ は Kashiwara-Tanisaki-Cassian [KT96, KT98, KT00, Cs96] により Kazhdan-Lusztig 多項式を用いて書けることが知られている[16]. 故に, Theorem 1 (2) and (3) より, 全ての $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ の既約最高ウエイト表現の指標がわかったことになる[17].

Remark 1. Theorem 1 は臨界レベル $k=-h^{\vee}$ の場合を排除しない. 実際, この場合の Theorem 1 の結果を用いることにより, Kac-Kazhdan 予想 [KK79] の (不等式を使わない) 極めて簡易な別証明を与えることができる ([A5] 参照, cf. [Hy88]).

1.6. W 代数を拡張する試みはこれまで主に物理学者の側から行われてきた (cf. [ST93, dBT97]) が, 最近になって V. Kac, S.-S. Roan と M. Wakimoto [KRW03] が最も一般的な拡張を定式化した. [KRW03] によると,

- even invariant super-symmetric bilinear form (,) を持つ単純スーパー Lie 環 $\mathfrak{g}$ と,
- $\mathfrak{g}$ の even part に含まれる冪零元 e

のペア $(\mathfrak{g},e)$ 対して, 対応する W 代数 $\mathcal{W}(\mathfrak{g},e)$ が定義される. (上で述べた $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ は e が principal の場合の $\mathcal{W}(\mathfrak{g},e)$ である.)

Kac-Roan-Wakimoto の仕事で著しいのは次の事実である.

> "($N=4$ スーパーコンフォー マル代数など) 現在までに知られているほとんど全てのスーパーコンフォー マル代数が, e が minimal の場合の $\mathcal{W}(\mathfrak{g},e)$ として現れる".

次は Frenkel-Kac-Wakimoto 予想の類似物である.

Conjecture 3 (V. Kac, S.-S. Roan and M. Wakimoto [KRW03]). λ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の許容ウエイト, $H^{\bullet}(V)$ を量子還元法により定まる *BRST* コホモロジーとすると, $H^{i\neq 0}(\widehat{L}(\lambda))=0$ が成立し, $H^0(\widehat{L}(\lambda))$ は零または既約である.

e が minimal の場合, Conjecture 3 は [A3] で証明された. 実際には, Theorem 1 同様のより強い主張が成立する. 特に, $\mathcal{W}(\mathfrak{g},e)$ (e: minimal) の全ての最高ウエイト既約表現の指標は, 対応するアフィンスーパ Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の既約表現の指標から完全に決定される ([A3]).

Remark 2. 1.4 では "ホモロジー" と呼び, Conjecture 3 では "コホモロジー" と呼んでいるのは理由があるのだが (別に逆でもいいのですが), ここでは説明しない.

---

[16]ただし, 表現のレベル k は $-h^{\vee}$ でないとする.

[17]$k=-h^{\vee}$ の時は $\mathcal{W}_{-h^{\vee}}(\mathfrak{g})$ が可換であることが知られている ([FF90]) ので既約表現は全て一次元である.

1.7. 上で述べたように, $\mathcal{W}(\mathfrak{g}) = \mathcal{W}(\mathfrak{g}, \text{principal})$ の最高ウエイト既約表現の指標は完全に決定された. $\mathfrak{g}$ がスーパー Lie 環, e が極小冪零元の場合も, $\widehat{\mathfrak{g}}$ の指標公式から $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)$ の最高ウエイト既約表現の指標がすべて決定されることがわかった. (ただし $\mathfrak{g}$ がスーパーの場合の既約表現の指標の導出は未解決問題である.) したがって, これらの場合は, W 代数の表現論に関してある程度満足のいく結果が得られたことになる.(そうはいってもやるべきことが実はまだたくさん残っているのだが.)

しかし, これらは冪零元が principal と minimal の両極端の場合であり, 他にも興味深い冪零軌道はいくらでもある. そこで以下では一般的の冪零軌道に対応する W 代数の表現論について, 現時点でわかっていることを述べたい.

2. Finite W-Algebras

2.1. アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ が有限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ のアフィン化 (あるいは chiralization) であることを思い出そう. この意味で, Virasoro 代数 Vir $(= \mathcal{W}(\mathfrak{sl}_2))$ はその zero-mode "$\mathbb{C}L_0$" の chiralization とみなせる. 菅原構成法により, L_0 は Casimir 元 Ω に対応し, $\mathcal{Z}(\mathfrak{sl}_2) = \mathbb{C}[\Omega]$ が成立する[18]ことに注意すると, $\mathcal{W}(\mathfrak{sl}_2)$ は $\mathcal{Z}(\mathfrak{sl}_2)$ の chiralization ということになる.

一般の (principal nilpotent 元に対応する) W 代数 $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ は $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ の chiralization とみなせる. 実際, この視点が Feigin-Frenkel 理論 [FF90] の胆である. この事実をもう少し数学的に述べておこう.

Theorem 2 ([A4]). *$\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ の[19]Zhu 代数 ([Zh96]) は $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ に自然に同型である.*

Remark 3. $\widehat{\mathfrak{g}}$ に対応する universal な vertex algebra の Zhu 代数は $U(\mathfrak{g})$ に自然に同型である ([FZ92]).

一般の $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)$ の場合も, Theorem 2 と同様に次を示すことができる.

Theorem 3 ([KdS05]). *$\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)$ の[20]Zhu 代数は**有限 W 代数** $\mathcal{W}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, e)$ に自然に同型である.*

有限 W 代数は以下で定義する.

2.2. 簡単のため, 以下 $\mathfrak{g}$ は (単純)Lie 環とする. また, e を $\mathfrak{g}$ の冪零元とし, 次の条件を仮定する.

Assumption 1.
$\mathfrak{g}$ には e に付随する even な good grading [KRW03, EK05] が存在する. すなわち, $\mathbb{Z}$-grading

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$$

が存在し, 次を満たすとする.

(1) $e \in \mathfrak{g}_1$
(2) $\operatorname{ad} e \cdot \mathfrak{g}_{j-1} \to \mathfrak{g}_j$ は $j \leq 0$ について単射.
(3) $\operatorname{ad} e \cdot \mathfrak{g}_j \to \mathfrak{g}_{j+1}$ は $j \geq 0$ について全射.

Remark 4. A 型の場合は, 与えられた e に対する good even grading は常に存在する ([EK05]).

---

[18] Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対し $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ で $U(\mathfrak{g})$ の中心を表す.
[19] 正確には $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g})$ $(\forall k \in \mathbb{C})$ の Zhu 代数 (脚注 6 を見よ)
[20] 正確には $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, e)$ $(\forall k \in \mathbb{C})$ の Zhu 代数

以下 good even grading $\mathfrak{g}=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_j$ を固定し,

$$\mathfrak{g}_-=\bigoplus_{j<0}\mathfrak{g}_j.$$

とおく. また $p\in\mathfrak{g}_-^*$ を

$$p(x)=(x,e).$$

で定める. すると, $p([\mathfrak{g}_-,\mathfrak{g}_-])=0$ が成立し, p は $\mathfrak{g}_-$ の指標を定める.

$\mathfrak{g}$ 加群 V について

$$\mathrm{Wh}(V)=\{v\in V; xv=p(x)v \text{ for all } x\in\mathfrak{g}_-\},$$
$$\mathrm{Wh}^{\mathrm{gen}}(V)=\{v\in V; (x-p(x))^r v=0\ (r\gg 0)\ \forall x\in\mathfrak{g}_-\}.$$

と定義しよう.

Lemma 1. $\mathrm{Wh}^{\mathrm{gen}}(V)$ は V の部分 $\mathfrak{g}$ 加群である.

$V=\mathrm{Wh}^{\mathrm{gen}}(V)$ が成立するとき, V を**一般化された Whittaker 加群**[21] と呼ぶ. (e に付随する) **一般化された Gelfand-Graev 表現**[22] Y は, このような表現の例である. これは次で定義される:

$$\mathsf{Y}=U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{g}_-)}\mathbb{C}_p.$$

ただし, $\mathbb{C}_p=U(\mathfrak{g}_-)/\ker p$. Frobenius の相互率から次が成立する.

$$\mathrm{Wh}(V)\cong\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(\mathsf{Y},V)\quad (V\in\mathfrak{g}\text{-Mod}).$$

ここで, $(\mathfrak{g},e)$ に付随する有限 W 代数 $\mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g},e)$ は次で定義される.

$$\mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g},e)\underset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Wh}(\mathsf{Y}). \tag{7}$$

ただしその代数構造は同一視

$$\mathrm{Wh}(\mathsf{Y})=\mathrm{End}_{U(\mathfrak{g})}(\mathsf{Y})^{\mathrm{op}}.$$

の下で与えられるものとする.

Remark 5. $\mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g},e)$ は good grading の取り方に依らず定義されることが知られている ([BG05]).

Remark 6. $\tilde{\mathcal{C}}$ を一般 Whittaker 加群のなす $\mathfrak{g}$-Mod の充満部分圏とする. このとき対応

$$V\mapsto \mathrm{Wh}(V)$$

は $\tilde{\mathcal{C}}$ と $\mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g},e)$ 加群の圏との圏同値を与えることが知られている ([Sk02]). ここで, 逆函手は $E\mapsto \mathsf{Y}\otimes_{\mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g},e)}E$.

Remark 7. $\mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g},e)$ は e における Slodowy の横断片 S の量子化であることが知られている ([P02]). すなわち, ある filtration[23]が存在し, 対応する graded algebra $\mathrm{gr}\,\mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g},e)$ が S の座標環 $\mathbb{C}[S]$ に (Poisson 代数として) 同型となる.

Remark 8. Remark 5-7 は Assumption 1 を仮定せずに成立する.

---

[21] generalized Whittaker modules

[22] generalized Gelfand-Graev representation ([Kw85])

[23] Kazhdan filtration と呼ばれる. なおこの filtration は対応するアフィン W 代数で見た方が自然な意味を持つ.

Remark 9. J. Brundun と A. Kleshchev [BK04] は, A 型の場合, $\mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g},e)$ はヤンギアン $Y(\mathfrak{gl}_n)$ の subquotient として実現され, その結果 "ホップ代数的" 構造を持つことを示した. さらに彼達はこれを用いて $\mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g},e)$ の有限次元既約表現の指標を完全に決定した ([BK05]). ここで, 注意したいのは次の事実である.

"(A 型の)$\mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g},e)$ の有限次元表現論は $Y(\mathfrak{gl}_n)$ の有限次元表現論を含む".

つまり, $\mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g},e)$ の有限次元既約表現の指標公式から $Y(\mathfrak{gl}_n)$ の有限次元表現論の指標公式が従う. $Y(\mathfrak{gl}_n)$ の有限次元表現論の指標公式自体は既に知られていた ([A1, V98, N05]) が, Brundun-Kleshchev の手法は (non-simply laced の場合を含む) 他の型への一般化の可能性を排除しない. その他, テンソル積の構造が W 代数を経由すると非常に見やすくなるなど, 多くの興味深い内容を含む.

3. The Realization of Finite W-Algebras via BRST Cohomology

3.1. 前章では, 我々は有限 W 代数を, 一般化された Gelfand-Graev 表現の End 環として定義した. しかし, 現時点ではアフィン Lie 環の一般化された Gelfand-Graev 表現は定義されていない[24]ので, このまま chiralization を実行することはできない. したがって, アフィン W 代数を定義するためには W 代数の別の実現を用意しておく必要がある.

そのため, 我々は量子 BRST 還元法を用いて W 代数を定義する. これは, Kostant-Sternberg [Ks87] の BSRT cohomology を用いた Hamiltonian 還元の量子化である. 実際, $\mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g},e)$ は Poisson 代数 $\mathbb{C}[S]$ の量子化であったが (Remark 7 参照), $\mathbb{C}[S]$ の Poisson 構造は Hamiltonian 還元の結果として理解できる.

3.2. $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}_0$ の中にとる. Δ を対応する $\mathfrak{g}$ のルートの集合とすると, $\Delta=\bigsqcup_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j$ と分解される. ただし, Δ_j は $\mathfrak{g}_j$ に対応するルートの集合. 三角分解 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{n}_{0,-}\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_{0,+}$ を固定し, $\Delta_0=\Delta_{0,-}\sqcup\Delta_{0,+}$ を対応する分解とする. すると,

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{g}_+$$
$$\mathfrak{n}_-=\mathfrak{n}_{0,-}+\sum_{j<0}\mathfrak{g}_j,\quad \mathfrak{n}_+=\mathfrak{n}_{0,+}+\sum_{j>0}\mathfrak{g}_j$$

は $\mathfrak{g}$ の三角分解を与え,

$$\Delta_+=\Delta_{0,+}\sqcup\bigsqcup_{j>0}\Delta_j,\quad \Delta_-=\Delta_{0,-}\sqcup\bigsqcup_{j<0}\Delta_j$$

はそれぞれ $\mathfrak{g}$ の正ルート, 負ルートの集合となる. 以下,

$$\Delta(\mathfrak{g}_-)=\bigsqcup_{j<0}\Delta_j$$

とする.

3.3. Cl を $\mathfrak{g}_-\oplus\mathfrak{g}_-^*$ とその上の自然な双線型形式に付随した Clifford 代数とする. 具体的には, Cl は次の生成元と関係式で定義される.

生成元: $\psi_\alpha,\psi_\alpha^*\quad(\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_-))$

関係式: $\{\psi_\alpha,\psi_\beta^*\}=\delta_{\alpha,\beta},\quad\{\psi_\alpha,\psi_\beta\}=\{\psi_\alpha^*,\psi_\beta^*\}=0.$

テンソル積 $U(\mathfrak{g})\otimes Cl$ には自然に代数の構造が入るが, 我々はこれをスーパー代数とみなす. ($u\in U(\mathfrak{g})$ は even, $\psi_\alpha,\psi_\alpha^*$ ($\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_-)$) は odd.)

[24] 臨界レベルは除く.

次に (天下り的だが) $U(\mathfrak{g})\otimes Cl$ の odd の元 Q を以下で定義する.

$$Q = Q^{\mathrm{st}} + p,$$
$$Q^{\mathrm{st}} = \sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_-)} x_\alpha \psi^*_\alpha - \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma\in\Delta(\mathfrak{g}_-)} c^\gamma_{\alpha,\beta}\psi^*_\alpha\psi^*_\beta\psi_\gamma.$$

ここで, $[x_\alpha, x_\beta] = \sum_\gamma c^\gamma_{\alpha,\beta}x_\gamma$. ($x_\alpha$ は固定された $\mathfrak{g}$ のルートベクトル.) また指標 p は $\sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_-)} p(x_\alpha)\psi^*_\alpha \in Cl$ と同一視している.

Lemma 2. $[Q^{\mathrm{st}}, Q^{\mathrm{st}}](= 2Q^{\mathrm{st}}) = 0$, $[p,p] = 0$, $[Q^{\mathrm{st}}, p] = 0$ が成立し, したがって $[Q,Q] = 0$, すなわち,

$$Q^2 = 0$$

となる.

3.4. Lemma 2 より, $U(\mathfrak{g})\otimes Cl$ 上で

$$(\mathrm{ad}\, Q)^2 = 0$$

が成立することがわかる[25]. したがって, 次数付けを

$$\deg \psi_\alpha = 1,\ \deg \psi^*_\alpha = -1 \quad (\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_-)),$$
$$\deg u = 0 \quad (u \in U(\mathfrak{g})).$$

でいれると, Q は次数 -1 の作用素となり, $(U(\mathfrak{g})\otimes Cl, \mathrm{ad}\, Q)$ を複体とみなすことができる. 対応するホモロジー

$$H_\bullet(U(\mathfrak{g})\otimes Cl, \mathrm{ad}\, Q) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H_i(U(\mathfrak{g})\otimes Cl, \mathrm{ad}\, Q)$$

には $U(\mathfrak{g})\otimes Cl$ から誘導される ($\mathbb{Z}$-graded) スーパー代数の構造が入る.

Theorem 4. ホモロジーの消滅 $H_{i\neq 0}(U(\mathfrak{g})\otimes Cl, \mathrm{ad}\, Q) = 0$ と, 代数としての同型

$$H_0(U(\mathfrak{g})\otimes Cl, \mathrm{ad}\, Q) \cong \mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g}, e),$$

が成立する.

3.5. V を $\mathfrak{g}$ 加群, $\Lambda(\mathfrak{g}_-)$ を $\mathfrak{g}_-$ の Grassmann 代数とする. このとき $V\otimes\Lambda(\mathfrak{g}_-)$ は自然に $U(\mathfrak{g})\otimes Cl$ 加群とみなせる. 従って Lemma 2 より, $(V\otimes\Lambda(\mathfrak{g}_-), Q)$ もまた複体となる. 対応するホモロジーを $H_i(V\otimes\Lambda(\mathfrak{g}_-), Q)$ $(i\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ とすると, $U(\mathfrak{g})\otimes Cl$ の $V\otimes\Lambda(\mathfrak{g}_-)$ への作用は, $H_0(U(\mathfrak{g})\otimes Cl, \mathrm{ad}\, Q) = \mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g}, e)$ の $H_i(V\otimes\Lambda(\mathfrak{g}_-), Q)$ への作用を誘導する. 一方, Q の定義から, 複体 $(V\otimes\Lambda(\mathfrak{g}_-), Q)$ は Lie 環のホモロジー $H_\bullet(\mathfrak{g}_-, V\otimes\mathbb{C}_p)$ を定義する Chevalley 複体に他ならないことが見て取れる. したがって, $H_\bullet(V\otimes\Lambda(\mathfrak{g}_-), Q) = H_\bullet(\mathfrak{g}_-, V\otimes\mathbb{C}_p)$ となり, 我々は次の関手を手に入れたことになる.

$$H^{\mathrm{fin}}_i(?) \underset{\mathrm{def}}{=} H_i(\mathfrak{g}_-, ?\otimes\mathbb{C}_p) : \mathfrak{g}\text{-Mod} \to \mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g}, e)\text{-Mod}$$

$(i\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$.

[25]もちろん ad はスーパーの意味での adjoint である.

3.6. $\mathcal{O}^{\mathrm{fin}}$ を $\mathfrak{g}$ の BGG 圏 ([BGG76]) とし，その充満部分圏 $\mathcal{O}_0^{\mathrm{fin}}$ を次で定義する:

$$\mathcal{O}_0^{\mathrm{fin}} = \{V \in \mathcal{O}^{\mathrm{fin}}; \mathrm{V}\ \text{は}\ \mathfrak{g}_0\ \text{加群としては有限次元表現の直和}\}.$$

$\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},e)$ の有限次元表現のなす圏を $\mathrm{Fin}\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},e)$ とする.

Theorem 5. $\mathcal{O}_0^{\mathrm{fin}}$ の任意の対象 V についてホモロジーの消滅 $H_{i\neq 0}^{\mathrm{fin}}(V)=0$ が成立し，さらに $H_0^{\mathrm{fin}}(V)$ は有限次元となる．したがって，$H_0^{\mathrm{fin}}(?)$ は $\mathcal{O}_0^{\mathrm{fin}}$ から $\mathrm{Fin}\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},e)$ への完全関手を与える.

Theorem 6 (A 型の場合は Brundun-Kleshchev [BK05]). 次を仮定せよ:

e は，それを含む $\mathfrak{g}$ の極小な *Levi* 部分代数 の中で *principal* である.

すると $L\in\mathcal{O}_0^{\mathrm{fin}}$ が既約ならば $H_0^{\mathrm{fin}}(L)$ は零または既約である.

Remark 10. A 型の場合は Theorem 6 の条件は常に満たされる.

4. Chiralization of Finite W-Algebras

4.1. この章では上記の構成を "chiralize" し，アフィン W 代数を定義する．このためには有限 W 代数を定義していた各データを次のようにアフィン化すれば良い:

- $\mathfrak{g}$ を対応するアフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}K$ で置き換える;
- $\mathfrak{g}_-$ をそのループ代数 $L\mathfrak{g}_-=\mathfrak{g}_-\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]\subset\widehat{\mathfrak{g}}$ で置き換える;
- Cl を $L\mathfrak{g}_-\oplus(L\mathfrak{g}_-)^*$ とこの上の自然な双線型形式に付随する Clifford 代数 $\widehat{Cl}$ に置き換える．これは次の生成元と関係式で定義される:

$$\begin{aligned}
&\text{生成元:} && \psi_\alpha(n),\ \psi_\alpha^*(n) \quad (\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_-),\ n\in\mathbb{Z})\ ,\\
&\text{関係式:} && \{\psi_\alpha(m),\psi_\beta^*(n)\}=\delta_{\alpha,\beta}\delta_{m+n,0},\\
& && \{\psi_\alpha(m),\psi_\beta(n)\}=\{\psi_\alpha^*(m),\psi_\beta^*(n)\}=0;
\end{aligned}$$

- $Q=Q^{\mathrm{st}}+p$ を $\widehat{Q}=\widehat{Q}^{\mathrm{st}}+\hat{p}$ に置き換える．ここで,

$$\widehat{Q}^{\mathrm{st}}=\sum_{\substack{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_-)\\ k\in\mathbb{Z}}} x_\alpha(-k)\psi_\alpha^*(k)-\frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\in\Delta(\mathfrak{g}_-)\\ k+l+m=0}} c_{\alpha,\beta}^\gamma\psi_\alpha^*(k)\psi_\beta^*(l)\psi_\gamma(m),$$

$$\hat{p}=\sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_-)} p(x_\alpha)\psi_\alpha^*(0).$$

$(x(k)=x\otimes t^k\in\widehat{\mathfrak{g}}.)$

以上のデーターを用いて，アフィン W 代数 $\mathcal{W}(\mathfrak{g},e)$ を

$$\text{“}\mathcal{W}(\mathfrak{g},e)=H_0(U(\widehat{\mathfrak{g}})\otimes\widehat{Cl},\operatorname{ad}\widehat{Q})\text{''}$$

と定義したいのだが (Theorem 4 参照), $\widehat{Q}$ の定義式に無限和が表れるのでこれは意味を持たない．そこで，意味を持たせるために $U(\widehat{\mathfrak{g}})\otimes\widehat{Cl}$ を完備化する．さらに他の理由により中心元 K の値を $k\in\mathbb{C}$ に特殊化しておく: $U_k(\widehat{\mathfrak{g}}) \underset{\mathrm{def}}{=} U(\widehat{\mathfrak{g}})/(K-k\,\mathrm{id})$. このとき $U_k(\widehat{\mathfrak{g}})\otimes\widehat{Cl}$ には自然な次数付けが入る:

$$U_k(\widehat{\mathfrak{g}})\otimes\widehat{Cl}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(U_k(\widehat{\mathfrak{g}})\otimes\widehat{Cl})_n,$$

ここで次数付けは次で定まるものとする.

$$\deg x(n)=\deg\psi_\alpha(n)=\deg\psi_\alpha^*(n)=n,\ \deg 1=0.$$

完備化

$$(\widetilde{U_k(\widehat{\mathfrak{g}})\otimes \widehat{Cl}})_n = \varprojlim_p (U_k(\widehat{\mathfrak{g}})\otimes\widehat{Cl})_n / \sum_{j\geq p} (U_k(\widehat{\mathfrak{g}})\otimes\widehat{Cl})_{n-j}(U_k(\widehat{\mathfrak{g}})\otimes\widehat{Cl})_j$$

を考え,

$$\widetilde{U_k(\widehat{\mathfrak{g}})\otimes\widehat{Cl}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (\widetilde{U_k(\widehat{\mathfrak{g}})\otimes\widehat{Cl}})_n.$$

と定めると, これで W 代数が定義できる.

$$\text{“}\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},e) = H_0(\widetilde{U_k(\widehat{\mathfrak{g}})\otimes\widehat{Cl}}, \mathrm{ad}\,\widehat{Q}) \quad (k\in\mathbb{C})\text{”}. \tag{8}$$

しかしこれはまだ $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},e)$ の正確な定義ではない. なぜなら, (8) で定義されいるのは通常の位相代数だが, Introduction に述べたように $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},e)$ は頂点代数として定義されるべきものであるからである. (8) の正確な意味は次の主張になる.

Theorem 7. 次の同型が成立する:

$$\mathcal{U}(\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},e)) \cong H_0(\widetilde{U_k(\widehat{\mathfrak{g}})\otimes\widehat{Cl}}, \mathrm{ad}\,\widehat{Q}).$$

ただし, 頂点代数 V について $\mathcal{U}(V)$ は対応する *(Frenkel-Zhu* [FZ92] *の意味での)* 普遍包絡環である

Remark 11. $H_{i\neq 0}(\widetilde{U_k(\widehat{\mathfrak{g}})\otimes\widehat{Cl}}, \mathrm{ad}\,\widehat{Q}) = 0$ も言える.

頂点代数 V について, V 加群とは定義から $\mathcal{U}(V)$ 加群に他ならない. それゆえ, このノートでは W 代数 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},e)$ の定義を与えることはせず, (8) を W 代数の “定義” とみなす.

Remark 12. $k\neq -h^\vee$ のとき $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},e)$ には VOA の構造が入り, 中心電荷 $c(k)$ を持つ (脚注 6).

4.2. 有限 W 代数の場合と同様, $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群から $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},e)$ 加群を次のようにして構成することができる: $\Lambda^{\frac{\infty}{2}}(L\mathfrak{g}_-)$ を次の条件を満たすベクトル $\mathbf{1}$ で生成される既約な $\widehat{Cl}$ 加群とする.

$$\psi_\alpha(n)\mathbf{1} = \psi_\alpha^*(n+1)\mathbf{1} = 0 \quad (\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}_-),\ n\geq 0).$$

$\mathcal{O}_k$ を level k の $\widehat{\mathfrak{g}}$ の BGG 圏, すなわち, $\mathcal{O}_k = \{V\in\mathcal{O}; V \text{ 上 } K = k\,\mathrm{id}_V\}$ とする. さらに, $\mathcal{O}_{k,0}$ を, $\mathfrak{g}$ 加群としては $\mathcal{O}_0^{\mathrm{fin}}$ の対象の直和になっているような加群のなす $\mathcal{O}_k$ の充満部分圏とする. すると, $V\in\mathcal{O}_{k,0}$ について, $V\otimes\Lambda^{\frac{\infty}{2}}(L\mathfrak{g}_-)$ は自然に $\widetilde{U_k(\widehat{\mathfrak{g}})\otimes\widehat{Cl}}$ 加群とみなせる. これより, 有限 W 代数の場合と同様, 対応するホモロジー

$$H_\bullet(V) \underset{\mathrm{def}}{=} H_\bullet(V\otimes\Lambda^{\frac{\infty}{2}}(L\mathfrak{g}_-), \widehat{Q}) \tag{9}$$

は $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},e)$ 加群となる.

Remark 13. 定義により $H_\bullet(V) = H_{\frac{\infty}{2}+\bullet}(L\mathfrak{g}_-, V\otimes\mathbb{C}_{\hat{p}})$ が成立する ([Fe84]).

4.3. 主結果.

Theorem 8. 任意の $\mathcal{O}_{k,0}$ の対象 V について $H_{i\neq 0}(V)=0$ が成立する.

Theorem 8 により関手

$$H_0(?):\mathcal{O}_{k,0}\to \mathcal{W}_k(\mathfrak{g},e)\text{-Mod}$$

は任意の $k\in\mathbb{C}$ について完全である.

Theorem 9.

(1) $\mathcal{O}_{k,0}$ の任意の単純対象 L について $H_0(L)$ は零または *almost irreducible*[26] である.

(2) e が *Theorem 6* の条件を満たしていれば, $\mathcal{O}_{k,0}$ の任意の単純対象 L について $H_0(L)$ は零または単純になる.

Remark 14. A 型の場合は, Brundan-Kleshchev [BK05] の結果から, 任意の $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},e)$ の最高ウエイト既約表現が $H_0(L(\lambda))$ ($L(\lambda)\in\mathcal{O}_{k,0}$) の形で得られることがわかる. 従って A 型の場合は, Theorem 9 (2) より全ての $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},e)$ の最高ウエイト既約表現の指標がわかったことになる (ただし, $k=-h^\vee$ の場合は除く).

References

[A1] Arakawa, T.; *Drinfeld Functor and Finite-Dimensional Representations of Yangian*, Commun. Math. Phys. 205, 1–18 (1999).

[A2] Arakawa, T.; *Vanishing of cohomology associated to quantized Drinfeld-Sokolov reduction.* Int. Math. Res. Notices, 2004, No. 15, 729-767.

[A3] Arakawa, T.; *Representation Theory of Superconformal Algebras and the Kac-Roan-Wakimoto Conjecture.* Duke. Math. J. Vol. 130 (2005), No. 3, 435-478.

[A4] Arakawa, T.; *Representation Theory of $\mathcal{W}$-Algebras*, math.QA/0506056.

[A5] Arakawa, T; *A simple proof of the Kac-Kazhdan conjecture*, to appear.

[BGG76] Bernstein, I. N., Gelfand, I. M., Gelfand, S. I.; *A certain category of g-modules*, Funkcional. Anal. Appl. 10 (1976), no. 2, 1–8.

[BG05] Brundan, J., Goodwin, S.; *Good grading polytopes*, preprint math.QA/0510205.

[BS95] *$\mathcal{W}$-symmetry.* Edited by P. Bouwknegt and K. Schoutens. Advanced Series in Mathematical Physics, 22. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1995

[BK04] Brundan, J., Kleshchev, A.; *Shifted Yangians and finite $\mathcal{W}$-algebras*, math.QA/0407012.

[BK05] Brundan, J., Kleshchev, A.; *Representations of shifted Yangians*, math.RT/0508003.

[dBT93] de Boer, J., Tjin, T.; *Quantization and representation theory of finite $\mathcal{W}$-algebras*, Comm. Math. Phys. 158 (1993), no. 3, 485–516.

[dBT97] de Boer, J., Tjin, T; *The relation between quantum $\mathcal{W}$-algebras and Lie algebras*, Comm. Math. Phys. 160(1997), 317-332.

[Cs96] Casian, L; *Proof of the Kazhdan-Lusztig conjecture for Kac-Moody algebras (the characters* $\mathrm{ch}\,L_{w\rho-\rho}$*)*, Adv. Math., 119 (1996) 207–281.

[DS85] Drinfeld, V. G., Sokolov, V. V.; *Lie algebra and the KdV type equations*, Soviet J. Math. 30, 1975-2036 (1985).

[EK05] Elashvili, A.G., Kac, V.G.; *Classification of Good Gradings of Simple Lie Algebras*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) vol 213 (2005), 85–104.

[FL88] Fateev, V. A., Lykyanov, S. L.; *The models of two-dimensional conformal quantum field theory with Z_n symmetry*, Internat. J. Modern Phys. A 3 (1988), no. 2, 507–520.

[FZ87] Fateev, V. A., Zamolodchikov, A. B.; *Conformal quantum field theory models in two dimensions having Z_3 symmetry*, Nuclear Phys. B 280 (1987), no. 4, 644–660.

[Fe84] Feigin, B. L.; *Semi-infinite homology of Lie, Kac-Moody and Virasoro algebras*, Uspekhi Mat. Nauk 39 (1984), no. 2(236), 195–196.

[26] $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graded $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},e)$-module $V=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}V_{\mathrm{top}-n}$ が almost irreducible とは V の零でない任意の部分加群 N について $N\cap V_{\mathrm{top}}\neq 0$ が成立することをいう ([KdS05]).

[FF90] Feigin, B., Frenkel, E.; *Quantization of the Drinfeld-Sokolov reduction*, Phys. Lett. B 246 (1990), no. 1-2, 75–81.

[Fre92] Frenkel, E; *$\mathcal{W}$-algebras and Langlands-Drinfeld correspondence*, New symmetry principles in quantum field theory (Cargse, 1991), 433–447, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., 295, Plenum, New York, 1992.

[FB01] Frenkel, E., Ben-Zvi, D.; *Vertex algebras and algebraic curves*, Mathematical Surveys and Monographs, 88, 2001

[FKW92] Frenkel, E., Kac, V., Wakimoto, M.; *Characters and fusion rules for W-algebras via quantized Drinfeld-Sokolov reduction*, Comm. Math. Phys. 147 (1992), no. 2, 295–328.

[FR98] Frenkel, E., Reshetikhin, N.; *Deformations of $\mathcal{W}$-algebras associated to simple Lie algebras*, Comm. Math. Phys. 197 (1998), no. 1, 1–32.

[FR99] Frenkel, E., Reshetikhin, N.; *The q-characters of representations of quantum affine algebras and deformations of $\mathcal{W}$-algebras*, Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998), 163–205, Contemp. Math., 248, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[FZ92] Frenkel, I. B., Zhu, Y; *Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras*, Duke Math. J. 66 (1992), no. 1, 123–168.

[Hy88] Hayashi, Takahiro; *Sugawara operators and Kac-Kazhdan conjecture*, Invent. Math. 94(1988), no. 1, 13–52.

[KK79] Kac, V. G., Kazhdan, D. A.; *Structure of representations with highest weight of infinite-dimensional Lie algebras*, Adv. in Math. 34 (1979), no. 1, 97–08.

[KRW03] Kac, V. G., Roan, S.-S., Wakimoto, M.; *Quantum reduction for affine superalgebras*, Commun. Math. Phys. 241 (2003), 307-342.

[KdS05] Kac, V., de Sole, A.; *Finite vs. W-algebras*, math-ph/0511055.

[KW88] Kac, V. G., Wakimoto, M.; *Modular invariant representations of infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 85 (1988), no. 14, 4956–4960.

[KW89] Kac, V. G., Wakimoto, M.; *Classification of modular invariant representations of affine algebras*, Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988), 138–177, Adv. Set. Math. Phys., 7, World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1989.

[KW04] Kac, V. G., Wakimoto, M.; *Quantum Reduction amd Representation Theory of Superconformal Algebras*, Adv. Math. 185 (2004) 400–458.

[KW04'] Kac, V. G., Wakimoto, M.; *Corrigendum to; "Quantum reduction and representation theory of superconformal algebras" [Adv. Math. 185 (2004), no. 2, 400–458; MR2060475]*, Adv. Math. 193 (2005), no. 2, 453–455.

[KT96] Kashiwara, M., Tanisaki, T.; *Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level II : Nonintegral case*, Duke Math. J., 84 (1996) 771–813.

[KT98] Kashiwara, M., Tanisaki, T.; *Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebras. III. Positive rational case*, Mikio Sato; a great Japanese mathematician of the twentieth century. Asian J. Math. 2 (1998), no. 4, 779–832.

[KT00] Kashiwara, M., Tanisaki, T. *Characters of irreducible modules with non-critical highest weights over affine Lie algebras. Representations and quantizations*, 275–296, China High. Educ. Press, Beijing, 2000.

[Kw85] Kawanaka, N.; *Generalized Gelfand-Graev representations and Ennola duality*, Algebraic groups and related topics (Kyoto/Nagoya, 1983), 175–206, Adv. Stud. Pure Math., 6, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[Ks78] Kostant, B.; *On Whittaker vectors and representation theory*, Invent. Math. 48 (1978), no. 2, 101–184. 329–387.

[Ks87] Kostant, B., Sternberg, S.; *Symplectic reduction, BRS cohomology, and infinite-dimensional Clifford algebras*, Ann. Physics 176 (1987), no. 1, 49–113.

[Lk88] Lukyanov, S. L. *Quantization of the Gelfand-Dikii bracket*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 22 (1988), no. 4, 1–10, 96; translation in Funct. Anal. Appl. 22 (1988), no. 4, 255–262 (1989)

[N05] Nakajima, Hiraku; *Quiver varieties and t-analogs of q-characters of quantum affine algebras*, Ann. of Math. (2) 160 (2004), no. 3, 1057–1097.

[P02] Premet, A.; *Special transverse slices and their enveloping algebras*, Adv. Math. 170 (2002), no. 1, 1–55.

[ST93] Severin, A., W. Troost, W.; *Extensions of the Virasoro algebra and gauged WZW models*, Phys. Lett B315 (1993), 304-310.

[Sk02] Skryabin, S.; *A category equivalence*, appendix to [P02].

[V98] Vasserot, E.; *Affine quantum groups and equivariant K-theory*, Transform. Groups 3 (1998), no. 3, 269–299.

[Zh96] Zhu, Y.; *Modular invariance of characters of vertex operator algebras*, Journal AMS 9(1996), 237-302.

[Zm85] Zamolodchikov, A. B.; *Infinite extra symmetries in two-dimensional conformal quantum field theory*, Teoret. Mat. Fiz. 65 (1985), no. 3, 347–359.

E-mail address: arakawa@cc.nara-wu.ac.jp